

سیستمهای کنترل مدرن

چهارشنبه: ۷:۳۰-۱۰:۳۰

نیمسال اول ۹۲-۹۳

دکتر شریفی

دانشکده برق و کامپیوتر

دانشگاه صنعتی قم

کنترل مدرن

ارزوبابی } مباحثی ← ۸ نمره
 } ایمانی ← ۱۲ نمره

منابع درس:

۱- دکتر علی خاکی صدیق - "اسل کنترول مدرن"، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۹۱

وو واد "Linear system Theory" 2-chi-Tsong chen

سرفصل { :

۱- مقدمات، مباحث ریاضی و جبر خطی (حذت)

۲- نمایش فضا حالت

۳- کنترول پذیری و رؤیت پذیری (controllability و observability)

۴- نظریه تحقق (Realization)

۵- تحلیل پایداری (stability)

۶- طراحی جبراز ساز (میخیز حالت)

۷- طراحی مذمب گر جبراز ساز

۸- سیم لار LT۷

۹- سیم لار کنترول مینه خطی (LQR)

فصل ۲- توصیف نظام حالت

* در کلیت سیستم، تغییر حالت (x) عناصر ذخیره کننده انرژی باشند.

* کد نرم‌آزمایی برای کلیت سیستم که دارای یک معیشت زیرین و یک معیشت:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \text{و نیز } \vec{f} \text{ و } \vec{g} \text{ توابع بردار غیر خطی اند.}$$

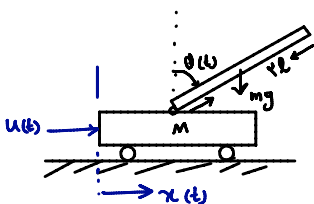
با فرض معادلات فید‌بک حول نقطه کار ($\vec{x}_0$ و $\vec{u}_0$) با کمک سبب تبدیل مارتین اول داریم:

$$\begin{cases} \Delta \vec{x}(t) = A(t) \Delta \vec{x}(t) + B(t) \Delta \vec{u}(t) \\ \Delta \vec{y}(t) = C(t) \Delta \vec{x}(t) + D(t) \Delta \vec{u}(t) \end{cases} \rightarrow LTV$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n & \dots & \dots & \partial_{x_n} f_n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{و} \quad B(t) = \begin{bmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \partial_{u_2} f_1 & \dots & \partial_{u_m} f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_1} f_n & \dots & \dots & \partial_{u_m} f_n \end{bmatrix}_{n \times m} \quad \text{و} \quad C(t) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} g_1 & \dots & \partial_{x_n} g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} g_\ell & \dots & \partial_{x_n} g_\ell \end{bmatrix}_{\ell \times n}$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} \partial_{u_1} g_1 & \dots & \partial_{u_m} g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_1} g_\ell & \dots & \partial_{u_m} g_\ell \end{bmatrix}_{\ell \times m}$$

در کلیت سیستم LTI مارتین در A و B و C و D داریم که وابسته به زمان نمی‌باشند.



(مثال) برای سیستم زیر، معادلات حالت وادشته حول نقطه تعادل خطی مانتز کنید؟

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2\sin(\theta) = u(t) \\ (I+m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x}\sin(\theta) - m\ell g\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x} \quad x_3 = \theta \quad x_4 = \dot{\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = x_1 \\ x_1^* = -\overline{m}_1 \cos(x_1) x_2^* + \overline{m}_1 \dot{\phi}^2 - (x_1^*) x_2^* + \frac{1}{m_1 + M} u(t) \end{array} \right.$$

از نظر

مثال (2) حالت زیر را حل کنید:

$$\textcircled{1} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \bar{e}^t$$

$$\textcircled{2} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\textcircled{1} \quad x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad ; \quad e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots \quad \left. \vphantom{\int_0^t} \right\} \rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^k = [0] \quad ; \quad k \geq 2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1-\tau & \bar{e}^\tau \\ 0 & \bar{e}^\tau \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \bar{e}^\tau + (\tau \bar{e}^\tau + \bar{e}^\tau) \\ \bar{e}^\tau \end{bmatrix}^t \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad sX - x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} X = x(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ x(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \right\} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+1)(s+3)} \left\{ \dots \right\}$$

تبدیل هاسنر برای معادلات حالت

هدف نهایی: بدست آوردن تبدیلی که ماتریس A را به یک ماتریس تبدیل کند که در پایه آن فرکانس نرمال سیستم ظاهر شود.

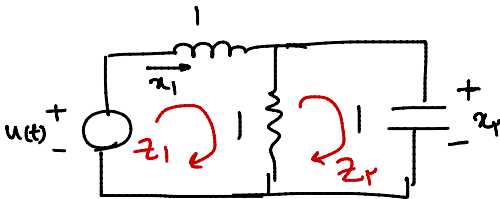
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (a) \longrightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \quad (b)$$

انجام عملیات قطری و یا بسطی در ماتریس معادل منبج کرنج ماتریس توسط ماتریس تبدیلی می باشد و یا به عبارتی معادل از تغییر سفته اشاره شود که آن نیز معادل منبج ماتریس است.

$$z(t) = T x(t)$$

تبدیل سفته $z = T x$ را در (b) جایگزین می کنیم:

$$\begin{cases} T \dot{x} = \bar{A} T x + \bar{B} u \\ y = \bar{C} T x + \bar{D} u \end{cases} \xrightarrow[\text{مقایسه با معادله (a)}]{\text{جایگزینی با معادله (a)}} \begin{cases} T^{-1} \bar{A} T = A \\ T^{-1} \bar{B} = B \\ \bar{C} T = C \\ \bar{D} = D \end{cases} \quad (c) \quad \begin{cases} \bar{A} = T A T^{-1} \\ \bar{B} = T B \\ \bar{C} = C T^{-1} \\ \bar{D} = D \end{cases}$$



(مثال)

$$\begin{cases} -u + x_1 + x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) & \quad T A T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} z_1 = x_1 + 0 \cdot x_2 \\ z_2 = x_1 - x_2 \end{cases} &\longrightarrow z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x & \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فقری ساز معادلات حالت (Decoupling)

- ۱- مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی و متمایز باشند.
- ۲- مقادیر ویژه A هم حقیقی و هم مدهی بوده و بی باز متمایز باشند.
- ۳- مقادیر ویژه A مکرر باشند.

هدف ← بدست آوردن تبدیلی که ماتریس $\bar{A}$ بصورت قطری باشد در مقابل

تنها مقادیر ویژه A می باشد.

توجه: اگر مقادیر ویژه A متمایز باشند آنگاه بردار ویژه A مستقل خطی اند.

زیرین کنند مقادیر ویژه $\bar{A}$ که متمایز عبارت از $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند. طبق توجه بالا بردار ویژه مستقل از ابعاد $AV_i = \lambda_i V_i$ بدست می آید که $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} AV_1 &= \lambda_1 V_1 \\ AV_2 &= \lambda_2 V_2 \\ &\vdots \\ AV_n &= \lambda_n V_n \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad A \underbrace{[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]}_N = \underbrace{[V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\begin{aligned} TAT^{-1} &= \bar{A} = \Lambda \\ \longrightarrow \bar{A} &= N^{-1} A N \quad \underline{A = N \bar{A} N^{-1}} \quad ; \quad T = N^{-1} \end{aligned}$$

نکته: در بحث تبدیل قطری سازی، نرم جواب معادله حالت تغییر نکند:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots = \frac{A = \sqrt{\Lambda}\Lambda^{-1}}{I + \sqrt{\Lambda}\Lambda^{-1}t + \sqrt{\Lambda}\Lambda^{-1}\frac{1}{2}t^2 + \dots} \\ = \sqrt{\Lambda} \left(I + \Lambda t + \frac{1}{2}\Lambda^2t^2 + \dots \right) \Lambda^{-1} = \sqrt{\Lambda} e^{\Lambda t} \Lambda^{-1}$$

پس ممکن است که ما جواب مربوط به α طبق رابطه بالا تبدیل باید. بخواهیم از تبدیل فوق داشت
قطر بدین A که ما Λ است حل ساده تر معادله حالت است زیرا در این صورت طبق تعریف کلی-ها می بینیم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{داریم:}$$

(مسئله) $x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$ را حل کنید، نیز با استفاده از قطری سازی
بازار $u(t) = e^{-t}$ ، معادله حالت را حل کنید؟

گام 1- ما سبب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه: $|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + 3\beta_1 = 0 \end{cases} \rightarrow N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 + 3\beta_2 = 3\beta_2 \end{cases} \rightarrow N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [N_1, N_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} ; V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \Lambda = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = V^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

معادلات حالت تفرد، عبارت است از:

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A z + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u(t)$$

$$\longrightarrow e^{-\lambda t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{pmatrix}$$

$$z(t) = e^{-\lambda t} z(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{pmatrix} z(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-\tau} \\ -e^{0t-\tau} \end{pmatrix} d\tau$$

$$\begin{pmatrix} e^{t-\tau} & 0 \\ 0 & e^{0t-\tau} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow z(t) = \dots \longrightarrow u(t) = V z(t)$$

فرم کاندنسیال بلر معادلات حالت:

اگر معادله مستطقیه به بیام عبارت باشد از:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ماتریس $\bar{A}$ در این فرم عبارت است از:

ماتریس تبدیل T نیز از رابطه زیر بدست می آید (ملاحظه!)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

(بهترین) فرم کاندنسیال معادلات حالت زیر را بدست آورده:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} u(t)$$

(حالت دوم) - مقادیر ویژه ماتریس A متناهی باشند اما بعضی از آنها صفر باشند.

فرض کنیم $m+1$ مقدار ویژه از A صفر و بقیه $\lambda_{m+2} = \sigma_1 \mp j\omega_1, \dots, \lambda_n = \sigma_m \mp j\omega_m$ و بقیه مقادیر ویژه حقیقی و بعید $\lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n$ باشند.

بردار ویژه مربوط به مقادیر ویژه فیکت، دارای درجه دوم فیکت است. بنابراین ماتریس V دارای فیکت باشد، تراش بردار ویژه مربوط به این مقادیر ویژه را بعید در بردار ویژه زیر با مقادیر حقیقی در نظر گرفت:

$$\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}}_{\text{فیکت}}, \underbrace{v_{m+2}, \dots, v_n}_{\text{حقیقی}}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(v_1) & \text{Im}(v_1) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \text{Re}(v_m) & \text{Im}(v_m) \end{bmatrix}$$

د بردار

حالت ماتریس تبدیل V را بعید زیر در نظر بگیریم:

$$V \triangleq \begin{bmatrix} \text{Re}(v_1) & \text{Im}(v_1) & \text{Re}(v_2) & \text{Im}(v_2) & \dots & \text{Re}(v_m) & \text{Im}(v_m) & v_{m+2} & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

با وجود این ماتریس تبدیل می توانیم نشان دهیم که فرم بلوکی قطری زیربست می آید:

$$\bar{A} = VAV^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \sigma_m & \omega_m \\ -\omega_m & \sigma_m \end{matrix}} & & \\ & & \lambda_{m+2} & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = VB \qquad \bar{C} = CV^{-1} \qquad \bar{D} = D$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

(مسأل) سیستم LTI زیر را قطعه کنید؟

$$y(t) = (0 \quad 1 \quad r) x(t)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ r & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - r\lambda + r)$$

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_{r,r} = 1 \pm j$$

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\beta_1 \\ -\gamma_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -\alpha_1 \\ \gamma_1 = -\beta_1 = \alpha_1 \\ - \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A v_r = \lambda_r v_r \\ \bar{A} \bar{v}_r = \bar{\lambda}_r \bar{v}_r \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r + j b_r \\ a_r + j b_r \\ a_r + j b_r \end{pmatrix} = (1 + j) \begin{pmatrix} a_r + j b_r \\ a_r + j b_r \\ a_r + j b_r \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_r + j b_r = a_r - b_r + j(a_r + b_r) \\ a_r + j b_r = a_r - b_r + j(a_r + b_r) \\ -r a_r + a_r + j(-r b_r + b_r) = a_r - b_r + j(a_r + b_r) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_r = a_r - b_r \\ b_r = a_r + b_r \\ a_r = a_r - b_r \\ b_r = a_r + b_r \\ -r a_r + a_r = a_r - b_r \\ -r b_r + b_r = a_r + b_r \end{cases}$$

$$\rightarrow v_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+j \\ rj \end{bmatrix} \rightarrow \hat{u}_r = \text{Re}(v_r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{v}_r = \text{Im}(v_r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & r \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = V A V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = V B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{C} = C V^{-1} = (r \quad 1 \quad 1 \quad r)$$

(حالت سوم) - فرض کنیم که مقدار ویژه λ_1 ، k بار تکرار شده باشد یعنی $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ در این صورت مقدار ویژه غیر تکراری باشند.

با توجه به اینکه می توانیم k بردار ویژه مستقل برای مقدار ویژه λ_1 تا λ_k بیست آورد، باید سعی کردیم بردارهای v_1 را به نحوی از هم مستقل کرد. برای این منظور یک بردش بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 + v_1 \\ Av_3 &= \lambda_3 v_3 + v_2 \\ &\vdots \\ Av_k &= \lambda_k v_k + v_{k-1} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &k \text{ بردار ویژه مستقل از هم بیست می آید که بسط هر} \\ &\text{ماتریس } T \text{ دیا } V \text{ هست.} \end{aligned}$$

حالا اگر برای مقدار ویژه λ_1 تکرار شدن در حالت $Av = \lambda_1 v$ تعداد m بردار مستقل خطی داشته باشیم و ما به مقدار دیگر بعد هسته $(A - \lambda_1 I)$ ، m باشد. در این حالت m بردار ویژه مستقل خطی مربوط به k تا مقدار ویژه تکراری λ_1 تا λ_k داریم و در نتیجه m بلوک جردن در ماتریس $\bar{A}$ تشکیل خواهد گرفت. باید دقت کرد در ماتریس تبدیل، درستش باید برای بردار ویژه تعیین یافته حرکت از v_1 تا v_m در هسته $A - \lambda_1 I$ داریم. نکته دیگر قرارگرفتن تا اصطلاح حاصل شده $\bar{A}$ بلوکی قطری جردن است.

به عنوان فرض کنیم حالت مشخصه A بصورت زیر باشد: $(\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2)^2 (\lambda - \lambda_3) = 0$. می توانیم سه بعد هسته $(A - \lambda_1 I)$ و $(A - \lambda_2 I)$ بلوک کس جردن زیر را بیست آورد:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \lambda_1 & \dots & 0 \\ & & & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & & & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & & & & \lambda_3 & \dots \\ & & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \text{rank}(A - \lambda_1 I) &= 1 \\ \text{rank}(A - \lambda_2 I) &= 1 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \text{rank}(A - \lambda_1 I) &= 2 \\ \text{rank}(A - \lambda_2 I) &= 1 \end{aligned}$$

که اگر بعدی ۱ باشد λ_2 مقدار نمی‌گرفته

(مثال) ماتریس A زیر را قوی (بلکی) کنید؟

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |\lambda I - A| = 0 \rightarrow (\lambda + 1)^3 (\lambda + 2) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -2$$

$$(A - \lambda_1 I) = (A + I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rank}(N(A + I)) = 1$$

هسته

که یک بردار ویژه مستقل مدیما به $\lambda_1 = -1$ داریم و تنها یک بلوک جرخ عبور = غیر دلخواه.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & -2 \end{pmatrix}$$

(مثال) سیستم I تا II را مختصر کنید؟

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad ; \quad y = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) x$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad ; \quad \lambda_{3,4} = -1 \pm j \quad \omega_p$$

$\text{rank}(A - \lambda_1 I) = 3 \rightarrow$ می برداریم و جبر داریم باید
نظریه استقلال آنرا به دست بیاوریم
بردار ویرانه را داریم می برداریم λ_1 به دست آوریم.

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 = -v_1 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \bar{v}_2 = \lambda_1 \bar{v}_2 + v_1 \rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \cos \omega t + j \sqrt{2} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\text{Re}(v_p) \quad \quad \text{Im}(v_p)$

$$\text{ماتریس تبدیل} = (v_1 \quad \bar{v}_2 \quad \text{Re}(v_p) \quad \text{Im}(v_p)) \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = V B = T^{-1} B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \cos \omega t \\ \sqrt{2} \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = C T = C V^{-1} = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

* محاسبه ماتریس انتقال برای بلوک جردن:
(مراجعه شود به مرجع C.T. Chen, فریدل کئی - هامبلین)

بلوک جردن مرتبه k را بصورت زیر در نظر میگیریم:

$$J_{k \times k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

اگر ماتریس A شامل چندین بلوک جردن باشد در ماتریس گذر حالت $(e^{\bar{A}t})$ همزمانه ماتریس e^{Jt} بصورت بلوکی قرار میگیرند:

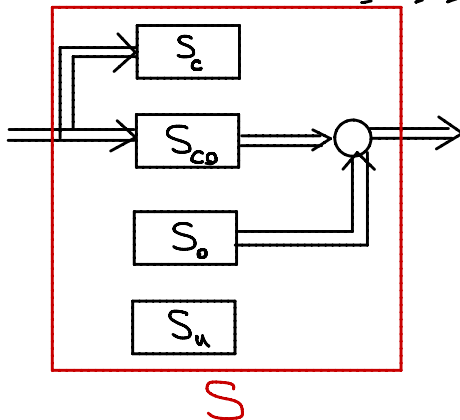
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_r \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \longrightarrow e^{\bar{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_r t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & e^{\lambda_r t} \end{pmatrix}$$

فصل ۳- کنترل پذیری و رادیت پذیری

در سیستم‌های فیزیکی، مهندسی چندین عامل سبب کنترل ناپذیری و رادیت ناپذیری سیستم شود:

- ۱- انتخاب متغیر حالت بیش از تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی و یا دینامیک‌ها
- ۲- وجود تعارض در سیستم فیزیکی بخصوص زمانی که در طرف خط تقاضا (تنگنا) امکان هم‌رانی‌ها کم باشد.
- ۳- وجود نیروی دینامیکال در کنونی درونی در سیستم که سبب کنترل ناپذیری می‌شود.
- ۴- حذف عنصر تعجب کردیل آنالیز است که در سیستم به دست سبب حذف تعجب و یا بعضی از دینامیک‌ها می‌شود.

کالین نساج داد که یک سیستم داینامیک به حجمی از زیربخش‌ها کرد:



S_c : نقطه کنترل پذیر
 S_{cd} : هم‌کنترل پذیر در هم‌سازیه پذیر
 S_o : نقطه رادیت پذیر
 S_u : هم‌کنترل پذیر و نه هم‌سازیه پذیر

S

۱- کنترل پذیری سیستم

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = CX \end{cases}$$

تعریف: سیستم به برد کنترل پذیر کامل اگر بتوان از زمان محدود هر حالت اولیه را $(X(t_0))$ را به حالت صفای $(X(t_1))$ سوق داد. در غیر این صورت سیستم کنترل پذیر کامل نیست.

برای بررسی کنترل پذیری باید معادلات حالت حل شود و آنکه بررسی کنیم که آیا در این حل، کلیه حالت‌ها در دسترس

$u(t)$ دارند و یا نه؟

$$X(t_1) = e^{-At} X(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau = e^{-At} X(t_0) + B \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) d\tau + AB \int_{t_0}^{t_1} (t_1-\tau) u(\tau) d\tau + \dots$$

اگر مجده ماتریس B ، AB ، $\dots$ ، $A^{n-1}B$ ، به یکدیگر وابسته نباشند، آنگاه طبق قضیه هر حالت در بردار $X(t_0)$ قابل کنترل است. $u(t)$ ضاهنه بردار سیستم کنترل پذیر کامل حالت می شود.

$M_c \triangleq [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \rightarrow$ M_c کامل = کنترل پذیر کامل حالت

کنترل پذیر نهایی بلوک جبرخ، قطری است:

فرض کنیم n نایه بلوک جبرخ n سیستم به صورت زیر باشد: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$ با k بار تکرار شده است: $d_1 + \dots + d_k = k$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \\ & & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

برای کنترل پذیر کامل حالت سیستم جبرخ پذیر باشد:

① هیچیک از بردار $b_1, b_2, \dots, b_n$ صفر نباشد.

② هیچیک از بردار $b_1, b_2, \dots, b_n$ صفر نباشد.

صفر نبوده و علاوه بر آن از یکدیگر مستقل باشند.

(مثال) کدام یک از سیستم زیر کنترل پذیر کامل حالت است؟

① $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$

جواب a و b عددی باشند، پس درست
غیر صفر جبرخ وابسته اند به سیستم
کنترل پذیر نهایی از آن کلیه مقادیر a و b

② $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ -b & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

برای کنترل پذیر بودن باید $[a \ b] \neq [0 \ 0]$ و $[a \ b] \neq [0 \ 0]$ مشکلی دیگر نیست، زیرا $a^2 + b^2 = 0$ پس a و b هر دو صفر باشند.
غیر صفر یکی از a و b و 2 سیستم کنترل پذیر کامل حالت است.

۲- مشاهده پذیری (observability)

سیستم $\begin{cases} \dot{X} = AX + B u \\ y = CX \end{cases}$ را در یک پذیر کامل حالت نسبت به آرمیتاژ با مشاهده بر دار خروجی $y(t)$ بتوانیم طبقه‌بندی کنیم.

بدست آورد. برای بررسی مشاهده پذیری $y(t)$ را حل می‌کنیم و در صورت مشاهده پذیر آرمیتاژ به کنترل پذیر می‌نویسند، برعکس می‌نویسند.

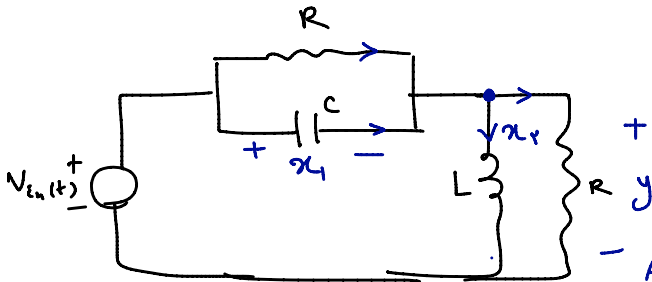
$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \rightarrow X(t) = e^{-At} X(t_0) \quad u(t) \equiv 0 \text{ (میانگین دهم)} \\ \rightarrow y(t) = C e^{-At} X(t_0)$$

طبقه‌بندی بر اساس C و CA و CA^2 و ... $\rightarrow \{C + CA(-t) + CA^2(\frac{1}{2}t^2) + \dots\} X(t_0) \rightarrow$ ماتریس آرمیتاژ (مطابق باشند).

برای اینکه بار هر زمانه $t = t_1$ بتوانیم از معادله بالا $X(t_1)$ را طبقه‌بندی کنیم، باید طبقه‌بندی بر مبنای C و CA و ... لازم مستقل خطی باشند. این شرط را در ماتریس مشاهده پذیر می‌نویسند و در برابر پذیر این ماتریس باید مرتبه کامل باشد.

$$M_0 \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

(مثال) مشاهده پذیری سیستم الکتریکی زیر را بررسی کنید؟



$$KVL: -V_{in}(t) + x_1 + L \dot{x}_2 = 0$$

$$KCL: C \dot{x}_1 + \frac{x_1}{R} = \dot{x}_2 + \frac{V_{in}(t) - x_1}{R} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} V_{in}(t) \quad u(t)$$

$$\dot{y} = V_{in} - x_1 = \underbrace{[-1 \ 0]}_C X + \underbrace{1}_D \int \underbrace{V_{in}(t)}_{u(t)}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{r}{RC} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rank}(M_o) = 2 \rightarrow \text{observable}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{r}{R^2C} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{LRC} \end{bmatrix} \rightarrow |M_c| = 0 \rightarrow \frac{1}{R^2C^2} + \frac{r}{R^2C^2} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\frac{1}{R^2C^2} = \frac{1}{LC} \rightarrow R^2 = \frac{L}{C} \rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{کنترل پذیری است}$$

اما برای کنترل پذیری $R \neq \sqrt{\frac{L}{C}}$

ماتریس پذیر در فرم جردن (نرخ کسب λ_1, λ_2 بار تکرار شود : $d_1 + \dots + d_p = r$)

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_p}(\lambda_p) \end{bmatrix} X + B u(t)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_{r+1} & \dots & c_n \end{bmatrix} X + D u(t)$$

برای اینکه سیستم فقط مساله پذیر باشد، باید در فرم جردن، ستون i ای از C که ستون متناظر آن در ماتریس A ، به صورت تک درجه هستند، غیر منفی باشند زیرا اگر منفی باشد، خروجی تک درجه‌ای باشد و انتخابی از طریق درجه کم دیگر به y ندارد، مساله ناپذیری شود. با توجه به اینکه مقادیر درجه غیر تکراری $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$ تک درجه‌ای (مستقل) هستند، این ستون متناظر C آنها یعنی c_{r+1} تا c_n باید غیر منفی باشند. از طریق خروجی بار متناظر درجه تکراری λ_1 ، تنها ستون مربوط هر یک خروجی تک درجه‌ای باشند، پس باید ستون مربوط هر یک خروجی $J_{d_1}(\lambda_1)$ غیر منفی باشد.

این سیستم را بفی، و در صورت لزوم مشکل باشند.

(مسئله) مشاهده پذیر سیستم را بدی نظر زیر را بررسی کنید؟

$$\textcircled{1} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & -2 & 3 \\ a & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

✓

$$\textcircled{2} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1 & 2 \\ -b & 2 & a & -1 & 0 \end{array} \right]$$

✗

* تجزیه سیستم به دو بخش مشاهده پذیر و مشاهده ناپذیر

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$M_o = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

اگر این سیستم مشاهده ناپذیر باشد (در مشاهده ناپذیر برخی از حالتها)، سبب می شود که ماتریس مشاهده پذیر M_o رتبه کامل نباشد، فرض کنیم $\text{rank}(M_o) = m$ باشد، آنگاه ماتریس M_o از سمت راست مشکل خطی M_o برده و نیز M_o تا m بردار خطی را می باشد که از هم مستقل بوده با $x_1, \dots, x_m$ ، ماتریس U رتبه کامل گفته می شود. تبدیل $z = UX$ ، سیستم بالادست به صورت زیر تجزیه می کنند:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} U$$

$$\bar{A} = UAU^{-1} \quad \bar{B} = UB$$

$$Y = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} z + DU$$

$$\bar{C} = CU^{-1} \quad \bar{D} = D$$

در تجزیه فوق، معادله $(\bar{A}_{11}, \bar{C}_1)$ زیر سیستم مشاهده پذیر و $(\bar{A}_{22}, \bar{C}_2=0)$ زیر سیستم مشاهده ناپذیر است.

(مسئله) - سیستم زیر را در صورت مشاهده ناپدید شدن در سیستم S_0 و S_u تجزیه کنید؟

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad ; \quad y = (0 \quad 0 \quad 1) x$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank}(M_0) = 2 \rightarrow \text{مشاهده پذیر نیست}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^{-1} = U A U^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{C} = C U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}_{11}$ (top-left 2x2 block), $\bar{A}_{12}$ (top-right 2x1 block), $\bar{A}_{22}$ (bottom-right 1x1 block), $\bar{C}_1$ (top part of C), $\bar{C}_2$ (bottom part of C)

$$S_0: (\bar{A}_{11}, \bar{C}_1) \quad ; \quad S_{u0}: (\bar{A}_{22}, \bar{C}_2)$$

* برای بررسی کنترل پذیری و نیز مشاهده پذیر بودن سیستم با معادلات حالت $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx + du \end{cases}$ و یا هم جبرجری می توان از معنی

PBH $\hookrightarrow$ Popov-Belevitch-Hautus معیشت زیر استفاده کرد:

معنی PBH: سیستم مدون کنترل پذیر حالت است اگر ماتریس $[sI - A \mid B]$ برای کلیه s رتبه کامل باشد و نیز مشاهده پذیر است اگر ماتریس $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$ برای کلیه s ها رتبه کامل باشد.

* کنترل پذیر مشاهده پذیر بر حسب سیم در مانج :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A^T \bar{x} + c^T u \\ \bar{y} = b^T \bar{x} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{در مانج}} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$$

نقطه با انداختن ماتریس کنترول پذیر M_c و مشاهده پذیر M_o و خواص دید که :

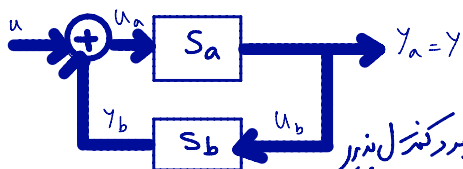
$$M_c = \bar{M}_o \quad ; \quad M_o = \bar{M}_c$$

* بررسی کنترول پذیر و مشاهده پذیر انتقال سیم

دو سیم S_a و S_b را در نظری گیریم ، سیم سری S_a و S_b را که خروجی S_a مسیر S_b می باشد به سیم $S_a \oslash S_b$ نشان می دهیم . انتقال مولتی این دو سیم را نیز بصورت $S_a \boxplus S_b$ نشان می دهیم . آنگاه فرض کنید که مدته S_a برابر با n_a و مدته S_b برابر با n_b باشد ، آنگاه معین انتقال سری ، موازی و یا سیخور $n_a + n_b$ می باشد . حال اگر هر دو سیم S_a و S_b کنترول پذیر (رابط پذیر) باشد در انتقال $S_a \oslash S_b$ ، کنترول ناپذیر (رابط ناپذیر) حاصل از S_a می باشد . البته در این انتقال ، کنترول پذیر (رابط پذیر) هر دو سیم S_a و S_b ، شرط لازم برای کنترول پذیر (رابط پذیر) $S_a \oslash S_b$ است . حال در ترکیب $S_a \boxplus S_b$ ، اگر هر دو سیم کنترول پذیر (رابط پذیر) باشند و فرض کنیم هیچیک از سیم ها متادیده و تکرار نشده باشند ، آنگاه خروجی این ترکیب هر دو سیم نیز دارای مسیر مستقل دارند پس کنترول پذیر می شود و نیز خروجی خروجی y_a تنها بر حسب x_a خروجی y_b تنها بر حسب x_b می باشد ، در ترکیب $S_a \boxplus S_b$ داریم :

$$y = y_a + y_b = c_a^T x_a + c_b^T x_b \quad , \quad \dot{x} = \dot{x}_a + \dot{x}_b = A_a x_a + A_b x_b + B_a u_a + B_b u_b$$

در نتیجه متادیده نمی گذارند در y نیز حذف نمی شوند ، پس سیم کل مشاهده پذیر است .



انتقال سیخور دو سیم را بصورت زیر در نظری گیریم و این انتقال را بصورت $S_a \oslash S_b$ نشان می دهیم . با توجه به اینکه در این نوع انتقال به سیم انتقال D یا A نیغته است ، پس ممکن است با وجود کنترول پذیر بودن سیم ها ، مشاهده پذیر هر دو سیم $S_a \oslash S_b$ ، کنترول ناپذیر ، یا مشاهده پذیر نباشد . دقت کنید که خروجی $u_a = u - y_b$ و

$$u_b = y_a = c_a^T x_a + d_a u_a \quad , \quad y_b = c_b^T x_b + d_b u_b$$

انتقال سیخور نامیده بدین (رابطه کامل) ماتریس $[D_a \quad D_b]$ ، می باشد .

شرط لازم و کافی برای کنترل پذیر (مشاهده پذیر) $S_a \bowtie S_b$ ، اینست که اتصال $S_a \cup S_b$ کنترل پذیر (اتصال $S_a \cup S_b$ مشاهده پذیر) باشد. در این سیستم کنترل ناپذیر (مشاهده ناپذیر) در مرتبه S_a و S_b کنترل پذیر و یا مشاهده پذیر باشد، حاصل از S_a می باشد.

*** کنترل پذیر خروجی:**

سیستم با معادلات حالت را کنترل پذیر خروجی گوئیم اگر بتوانیم یک سری $u(t)$ خروجی $y(t)$ را از $t=0$ به $t=1$ در زمان محدود $0 \leq t \leq 1$ تعیین کنیم. برای کنترل پذیر خروجی باید ماتریس کنترل پذیر خروجی زیر رتبه کامل باشد:

$$M_{yc} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D \end{bmatrix}$$

فصل ۴ - نظریه تحقق (Realization)

هدف: تبدیل توابع تبدیل سیستم (observer, controller, plant) به معادلات تفاضلی

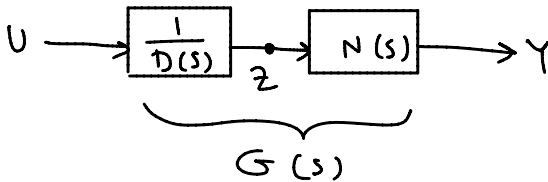
۱- تابع تبدیل SISO } درجه
۲- توابع تبدیل MIMO }

۱- تحقق مستقیم
۲- تحقق سازگی
۳- تحقق سری
۴- تحقق هار کنتین کتیه، مشاهده و غیره
۵- تحقق بار کنتینل پذیر، پذیرد پذیر

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

تابع تبدیل SISO:

۱- Direct Realization: ابتدا تابع تبدیل $G_1(s) = \frac{1}{D(s)}$

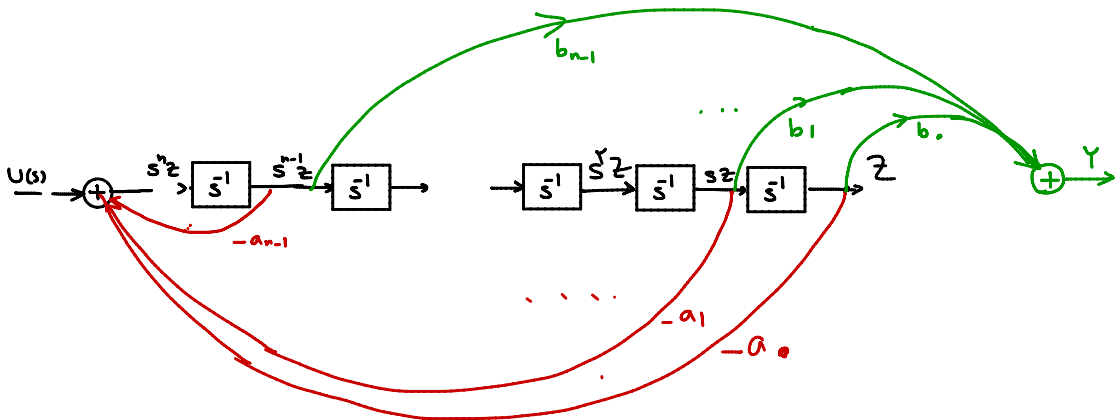


$$G_1(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{Z(s)}{U(s)}$$

$$\longrightarrow U(s) = D(s) Z(s) \quad ; \quad Y(s) = N(s) Z(s)$$

$$U(s) = s^n z + a_{n-1} s^{n-1} z + a_1 s z + a_0 z \longrightarrow s^n z = U(s) - a_{n-1} s^{n-1} z - \dots - a_1 s z - a_0 z$$

$$Y(s) = b_n s^{n-1} z + b_{n-1} s^{n-2} z + \dots + b_1 s z + b_0 z$$

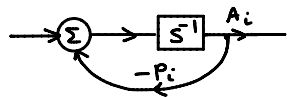
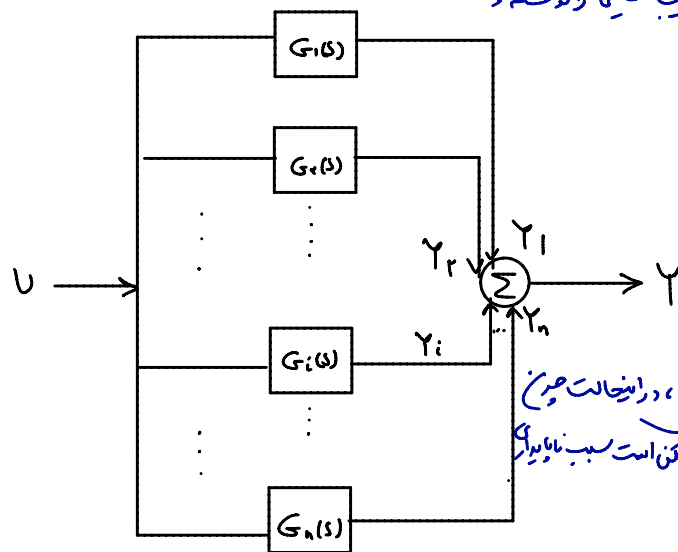


$$Y(s) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n G_i(s) U(s)$$

$$G_i(s) = \frac{A_i \xrightarrow{b_0}}{s + p_i \xrightarrow{a_0}}$$

۲- تحقق سوازی : چند در این حالت
(تجزیه به کسر جزئی)

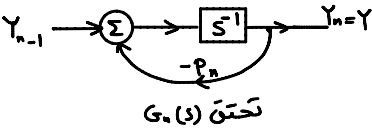
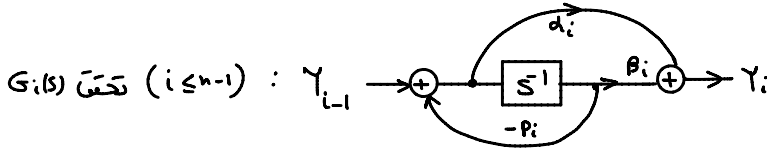
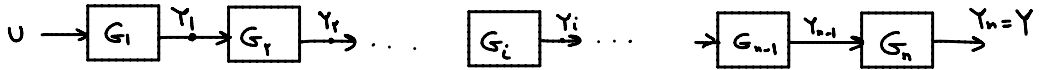
اگر بعضی از ریشه های p_i و $\bar{p}_i$ باشند (مزدوج و فقط) برابر تحقق
ممکن است که تابع تبدیل را به صورت 2^2 و با ضرایب حقیقی رانده شود
تحقق مستقیم بدهیم.



از نظر پیاده سازی عملی برای درجات بالا ۳، در این حالت چون
تعبیر دقیق نیست و خطای محاسباتی وجود دارد، این ممکن است سبب ناایده
محاسباتی شود.

$$G(s) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{s + \beta_i}{s + \alpha_i} \right) \underbrace{\frac{1}{s + \alpha_n}}_{G_0}$$

٣- تحقق سري (cascade):



*

٤- (الف): تحقق كسر لسه

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y}{U}$$

$$\frac{1}{D(s)} = \frac{z(s)}{U(s)} \rightarrow U(s) = D(s) z(s) = \underbrace{s^n z}_{x_n^0} + a_{n-1} \underbrace{s^{n-1} z}_{x_n} + \dots + a_1 \underbrace{s z}_{x_2} + a_0 \underbrace{z}_{x_1}$$

$$Y(s) = b_{n-1} s^{n-1} z + \dots + b_1 s z + b_0 z = b_{n-1} x_n + b_{n-2} x_{n-1} + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

$$A_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_{con} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

برابر حالت X_{con}
 $C_{con} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]$ و $D = 0$
 هاخ شكل تحقق مستقيم.

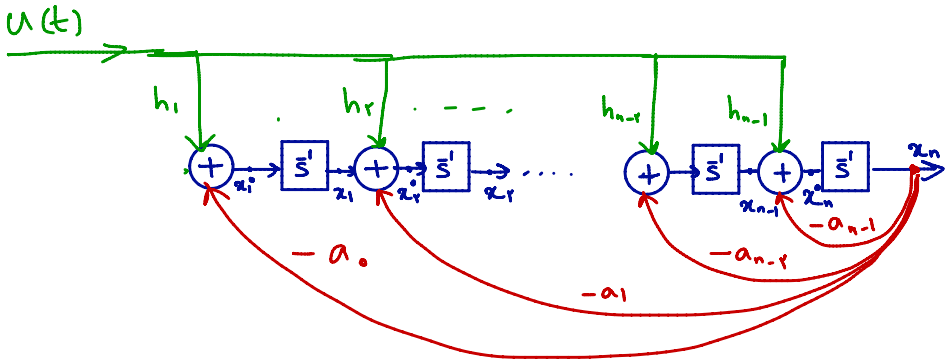
۵- تحقق کنترل پذیر و مدیت پذیر (کانونیکال)

(الف) کانونیکال مدیت پذیر:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_o \\ 1 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad B_o = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad C_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

برای محاسبه بارامتر مارکوف h_1 تا h_{n-1} از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_o \end{bmatrix}$$



* تحقق کنترل پذیر و مدیت پذیر دو بخش تحقق مدیت پذیر و مدیت پذیر است:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} ; B_c = C_o^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; C_c = B_o^T = [h_1 \ h_r \ \dots \ h_{n-1}]$$

(مسألة) برای تابع تبدیل $G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + 11s + 6}$ ، تحقق کنیزل کیه، و مذیک گر کنیزل و نیز و مذیک را بنویسید؟

control signal realization: (تحقق کنیزل کیه و استیال کنیزل) $A_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -4 \end{bmatrix} = A_c \equiv \text{controllable}$
 $B_{con} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; C_{con} = [1 \ 0 \ 1]$

observer realization: $A_{obs} = A_{con}^T = A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$
 $B_{obs} = C_{con}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; C_{obs} = B_{con}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

observable realization: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \\ h_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ 4 \times 1 + h_r = 0 \rightarrow h_r = -4 \\ 11 \times 1 - 4 \times 4 + h_c = 1 \rightarrow h_c = 24 \end{cases}$
 $B_o = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \\ h_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 24 \end{bmatrix} ; C_o = [1 \ 0 \ 0]$

controllable Reu: $B_c = C_o^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; C_c = B_o^T = [1 \ -4 \ 24]$

تَحَقُّقَ تَوَاجُعِ تَبْدِيلِ مَارِئِي :

تابع مقبلی $G_{pxp}(s)$ را بعد از زیر دزنی کلاسیک:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1p}(s) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & \dots & \dots & g_{pp}(s) \end{bmatrix}$$

در عدد تنگه برقی از دایره ۱، دایره قدرت و مغز ج یکسایخ باشد، (proper) ایستگاه.

باینیم، خارج قیمت آنرا به دست آوریم، از معادله (5) بهرینجی آورده و اگر وجه قدرت اعتباراً که حکم کردیم، آن خارج قیمت میسر است.
این خارج قیمت را از معادله (5) جدا کنیم که حاصل D است که می دهیم، تابع تبدیل با معادله، اکیداً آسره (P) است و آنرا استقفاً می دهیم.

$$G(s) = G_{sp}(s) + D$$

سب سے اڑکھلہ درالہجہ مارپیس G_{sp111} ، مخرج مشنک زیرِ رائی لٹرم :

$$G_{sp}(s) = \frac{N_{n-1} s^{n-1} + N_{n-r} s^{n-r} + \dots + N_1 s + N_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & I_p \\ -a_1 I_p & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_n I_p \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix} u$$

A_{con} B_{con}

$$y = \underbrace{[N_0 \ N_1 \ \dots \ N_{n-1}]}_{C_{con}} x + G(\infty) \underbrace{u}_{D_{con}}$$

(مسئله) برای تابع تبدیل زیر یک صحف کنند که به چه می باشد؟

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 1 \\ \frac{2}{s+2} & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}}_{G_{sp}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D_{con}}$$

$$G_{sp}(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2+2s+2}_{a_1} \underbrace{s+1}_{a_2}} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 2s+2 & 2s+2 \end{bmatrix} \rightarrow N_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} ; B_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; C_{con} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

فصل ۵ - پایداری

① پایداری بیسینال کنترل (دردی) $\equiv$ دو سگانهار - خردی کرانهار (BIBO)

② پایداری به شرایط اولیه سیستم $(u(t)=0 \equiv x_0)$ $\leftarrow$ پایداری داخلی (Internal stability)

① پایداری BIBO: سیستم کنترل پایدار BIBO است اگر برای هر ورودی کرانهار، خروجی کرانهار شود:

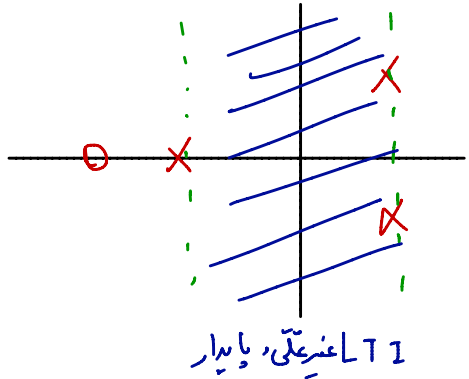
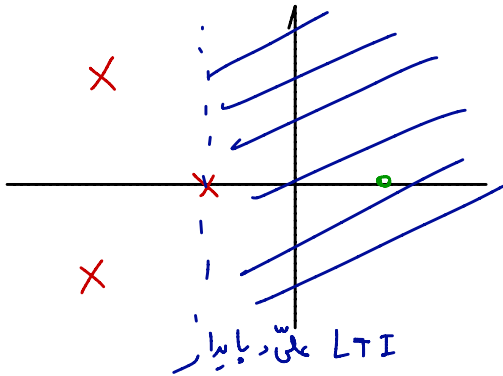
$$|u(t)| < A \longrightarrow |y(t)| < B \quad ; \quad \|u(t)\| < A \longrightarrow \|y(t)\| < B$$

برای سیستم LTI، داریم $y(t) = \int h(\tau) u(t-\tau) d\tau \leftarrow |y(t)| = \left| \int h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right|$

$$\leq \int |h(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq A \int |h(\tau)| d\tau \leq B \xrightarrow{\text{stable}} \int |h(\tau)| d\tau \leq C < +\infty$$

اگر محدوده زود $Roc > +\infty \rightarrow \int |h(\tau)| e^{+\infty \tau} d\tau \dots \leq C < +\infty \rightarrow |H(s)| \leq \int |h(\tau)| e^{+\infty \tau} d\tau \rightarrow H(s) = \int h(\tau) e^{s\tau} d\tau$

باشد، سیستم پایدار BIBO است، اگر سیستم LTI عتی باشد، گمانی است کلیه قطب در $H(s)$ درست چپ محدوده ز باشد.



پایداری داخلی (Internal Stability)

هدف، بررسی اثر شرایط اولیه بر پایداری سیستم است. زیرا شرایط اولیه نه تنها روی خروجی سیستم بلکه روی تمام متغیرهای داخلی نیز اثر می‌گذارد.

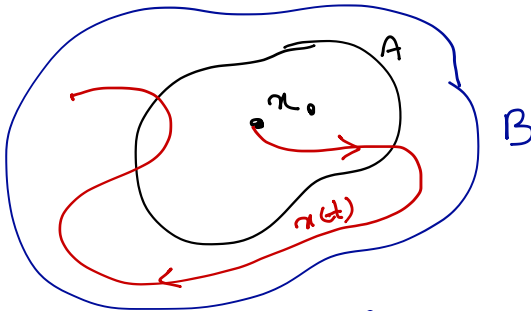
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$\dot{x} = Ax = 0 \rightarrow x_e \in \text{Ker}(A)$
نقطه تعادل (Equilibrium point)

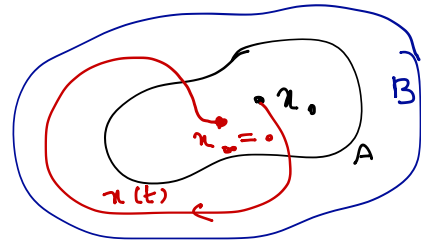
$$\Downarrow \quad At$$

$$x(t) = e^{At} x_0$$

$$\|x_0\| < A \xRightarrow{\text{پایداری داخلی}} \|x\| < B$$



پایداری داخلی حاشیه‌ای
marginally internal stable



پایداری داخلی مجازی
asymptotically

قصه: در حالت پویا اگر مدار دینامیک، ماتریس A در فرکانس ساز و یا
 است چه آن بازنه، سیم باید از حالتی است، اگر فقط در
 است چه مدار داشته باشند، سیم باید از مجانبی باشد.

(مثال) در بار، باید از داخلی سیم 2 زیر بحث کنیم.

$$\textcircled{1} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\textcircled{2} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

$$H(s) = S^2(s+1) = |sI - A|$$

$$H(s) = S^2(s+1)$$

$$M(s) = S(s+1)$$

$$M(s) = S^2(s+1)$$

در سیم LTI اگر $H(s)$ دایار عقب نگار در فرکانس ساز (سر دایره واحد)
 داشته باشد، باید حین جدار کنیم آنرا حساب کنیم، اگر در حین جدار
 کنیم نیز عقب نگار در فرکانس ساز داشته باشیم، سیم نایب دارد اگر
 نگار نداشته باشیم، سیم باید از حالتی است. مثلاً در مثال بالا، سیم
 باید از حالتی است، حالیکه سیم 2 نایب دارد.

پایداری لیاپانوف (Lyapunov stability)

دو مورد برابر برای پایداری سیستم غیر خطی

۱) روش امل لیاپانوف $\leftarrow$ متنی بر خطی سازیم حول نقطه

خاص (نقطه تعادل، نقطه مار...) سیستم برای پایداری
سیستم خطی داریم آن سیستم غیر خطی $\leftarrow$ بعضی حالت ها اتفاق می افتد که
سیستم خطی پایداری خود را ندارد و پایداری غیر خطی نمی توان بحث کرد

۲) روش هم لیاپانوف (تابع انرژی، شبه انرژی) : در این روش
برای هر سیستم یک تابع انرژی (شبه انرژی) مثبت تقریبی می شود. با توجه
به اینکه یک سیستم تمایل به از دست دادن انرژی و رسیدن و نقطه تعادل
دارد، اگر تغییرات این تابع منفی می شود، بیانگر پایداری آن سیستم بود.

تعریف ۱ (معین مثبت (منفی)) : یک تابع اسکالر از بردار حالت x
یعنی $V(x)$ را معین مثبت (منفی) گویند اگر برای کلیه x های که
 $\|x\| \leq k$ بدایع نتیجه گرفت که $V(x) > 0$ (یا $V(x) < 0$).
اگر مثبت (منفی) بدایع مایوس M صدق نماید، آن را تبدیل به
انرژی $V(x) = x^T M x$ می گویند، در این حالت $V(x) > 0$ (یا $V(x) < 0$)

نتیجه ده که M معین مثبت $(M > 0)$ یا معین منفی است. $(M < 0)$.
 * اگر علاوه بر اینها، $(<)$ یا $(>)$ باشد، $(\leq)$ یا $(\geq)$ باشد.
 آنگاه معین نیمه مثبت (نیمه منفی) نامیده می شود.

تعریف ۲ (نامعین Indefinite): اگر در برخی از n ابعاد $V(M)$ $(M > 0)$ و در برخی n ابعاد دیگر $V(M) < 0$ باشد، $(M < 0)$ نامعین است.
 انحراف (ماتریس) را نامعین می گویند.

معمولاً تعیین معین مثبت یا منفی بدین ماتریس M ، باید که ابعاد اصلی ماتریس را حساب کنیم، اگر طیف که ابعاد اصلی مثبت باشد، M معین مثبت را اگر که ابعاد M نامعین باشد، M معین مثبت را اگر که ابعاد M نامعین باشد، M معین مثبت است.

(مثال) معین مثبت (منفی) بدین تابع زیر تعیین کنید.

$$\textcircled{1} V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = x^T M x \xrightarrow{V = V^T} M^T = M$$

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = \{10, 4, 1\} > 0 \quad ; \quad \Delta_2 = \{39, 3, 4\} > 0 \\ \Delta_3 = |M| = 17 > 0 \rightarrow M: p.d$$

$$\textcircled{2} V(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = \{-1, -3, -11\} < 0 \quad ; \quad \Delta_2 = \{2, 29, 1, 0\} > 0 \quad ; \quad \Delta_3 = |M| = \dots < 0 \\ \rightarrow M: n.d$$

معادلات حالت سیستم غیر خطی و نقطه تعادل:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ y_r = g_r(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases}$$

نقش برابر

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \xrightarrow{u=0} \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

نقطه تعادل (Equilibrium point) ← x_e

در نقطه تعادل تغییرات ندارد، پس $\dot{x}_e = 0$ ، چرخ $\dot{x} = f(x)$ در نقطه تعادل باید برابر صفر باشد.

مثال (نقطه تعادل سیستم)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

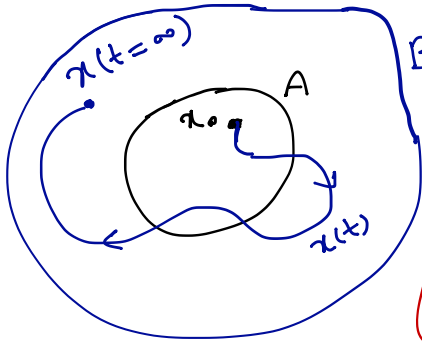
ما باید؟

$$x_e? \quad \begin{cases} -x_{1e} + 2x_{2e} = 0 \\ -2x_{1e} - x_{2e} + x_{2e}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1e} = 2x_{2e} \\ -2x_{2e} - x_{2e} + x_{2e}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{2e}(-2 - 1 + x_{2e}) = 0 \Rightarrow x_{2e} = 0 \text{ یا } 3 \Rightarrow \begin{matrix} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

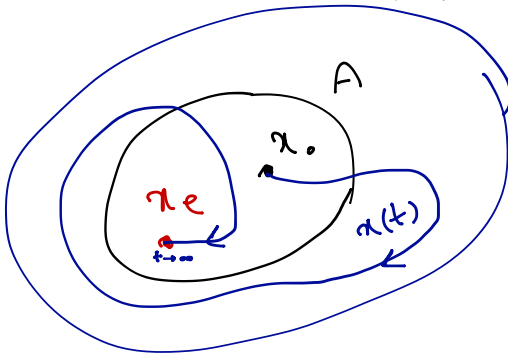
تعاریف پایداری در فضا



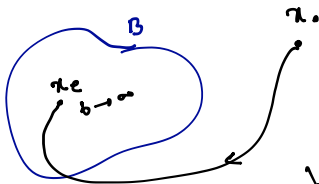
پایداری محلی (local stability) B

$$\|x_0\| < A \Rightarrow \forall t: \|x(t)\| < B$$

پایداری باطنی (asymptotic st.)



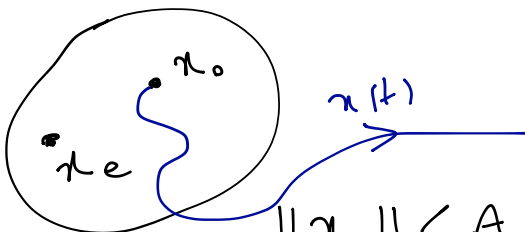
$$\|x_0\| < A \Rightarrow \begin{cases} \|x(t)\| < B \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x_e \end{cases}$$



پایداری سراسری (global stability)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{cases} \|x(t)\| < B; \forall t \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x_e \end{cases}$$

ناپایداری (unstable)



$$\|x_0\| < A \Rightarrow \|x(t)\| > B$$

باز ترکیب تعاریف بالا و نظریه پایداری لیاپانوف، قضایای پایداری زیر بدست می آید:

حذیرین مقیم $\dot{V}$ پایداری لیاپانوف: درایه اکت تابع لیاپانوف با شرط

$$V(x) > 0 \text{ و } V(x_e) = 0 \text{ در نظر می گیریم. سپس تغییرات}$$

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{dV}{dx} \dot{x}$$

حال بسته به علامت $\dot{V}$ ، پایداری یا ناپایداری عبارتند از:

① اگر $\dot{V} > 0$ که هم نامیده است،

② برای $\dot{V} \leq 0$ باشد، آنگاه x_e پایداری محلی است.

③ اگر $\dot{V} < 0$ و تنها برای x_e ، $V(x_e) = 0$ ، پایداری جهانی است.

یعنی اگر $\dot{V} < 0$ ، علاوه بر آن برای $\|x\| \rightarrow \infty$

داشته باشیم $V(x) \rightarrow \infty$ آنگاه پایداری سراسری است.

(مثال) پایداری نقاط تعادل سیستم زیر را بدست کنید.

$$\textcircled{1} \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) + \sin(\theta(t)) = 0$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = x_2 \\ x_2^* = -\sin(x_1) - x_2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x_1, x_2} = 1 - \cos(x_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial V}{\partial x_1} (x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} (-x_1 - x_2)$$

$$= \cancel{x_1} \Delta \cdot \cancel{x_1} + \cancel{x_1} (-\Delta \cdot \cancel{x_1} - x_1) = -x_1^2 \leq 0$$

$$n_c \equiv \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

سَمِیَا بِهٖ اِجْلِی اِسْت .

$$(2) \quad v(x_1, x_2) = x_1^r + x_2^r \implies v^* = \frac{\partial v}{\partial x_1} x_1^* + \frac{\partial v}{\partial x_2} x_2^*$$

$$xe = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v = r_{x_1}(x_2 - x_1(r_1^T + r_2^T))$$

$$- \gamma \tilde{x}_1 (\tilde{x}_1^r + \tilde{x}_r^r) - \gamma \tilde{x}_r (\tilde{x}_1^r + \tilde{x}_r^r) = - \gamma (\tilde{x}_1^r + \tilde{x}_r^r)^2 < 0$$

و شما در نقطه تعادل $\lambda = 0$ است، پس چرخ برابر $\infty \rightarrow \kappa_1, \kappa_2$

نتیجه می گیریم که $\infty \rightarrow V$ پس نقطه تعادل پایدار است.

بررسی پایداری لایانف سیستم LTI (پایدار داخلی):

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

① سیستم LTI را ناپایدار می گویند

$$V(x) = x^T M x \geq 0 \quad M \text{ معین مثبت (نیمه مثبت)}$$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \dot{x}^T M x + x^T M \dot{x} =$$

$$(A x(t))^T M x + x^T M (A x(t)) = x^T A^T M x +$$

$$x^T M A x = x^T (A^T M + M A) x < 0 \rightarrow \text{برابر یا بیشتر}$$

$-N ; N > 0$

بنا به بنام مساوی و آخر، برابر پایداری باید مائری معین مثبت $N > 0$ باشد از این $N > 0$ و جبهه دایره باشد در تعادل لایانف $A^T M + M A = -N$ صدق کند.

اگر N انتخاب شود، در حالت کلی حل M بصورت زیر به دست می آید:

$$M = \int_0^{\infty} e^{A^T t} N e^{A t} dt$$

(مثال) پایداری لایانف سیستم $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} x(t)$ را بررسی کنید؟

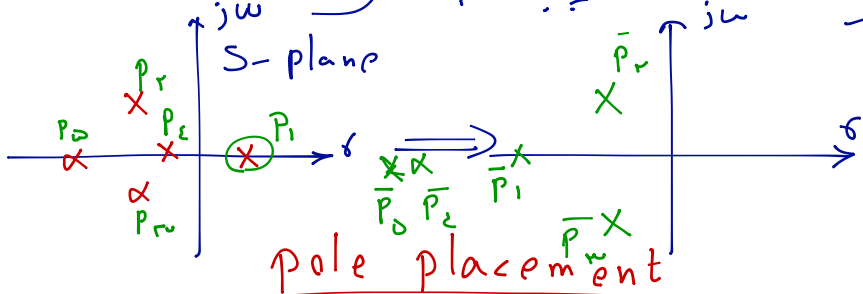
$$A^T M + M A = -N \quad \text{و} \quad N = I ; M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

فصل ۶ - طراحی سیستم کنترول در فضا حالت

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

مسئله کنترول کسبه جایابی قطب در سیستم است.



* شرط لازم و کافی برای جایابی قطب کنترول پذیر کامل حالت باشد.

روش‌های جایابی قطب

- ① روش ماتریس تبدیل
- ② روش جابجایی در سیستم
- ③ روش فصل آکرمن (Ackermann)

$$u = -Kx(t)$$

$$K = [k_1 \dots k_n] ; x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow u = -k_1 x_1 - \dots - k_n x_n$$

قبل از کنترول : $\dot{x} = Ax + Bu$: قطب در سیستم : $|sI - A| = 0$

بعد از کنترول : $\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$

قطب در سیستم : $|sI - A + BK| = 0$

روش ① ماتریس مشابهی T ($x = T \hat{x}$)

ماتریس مشابهی T را که به هم ابعاد و حالت را تبدیل به هم می کند، بدست می آوریم.

$$\dot{x} = Ax + Bu ; y = cx + Du$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u ; \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$|sI - A| = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n$
در مسائل خازنی شود که قبلاً رگونی در محل را بر ببرد

$$s_n = \mu_n, \dots, s_1 = \mu_1$$

معادله مشخصه: $(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = \dots$

$$s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n$$

حاله ماتریس T را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$T = \begin{bmatrix} \beta_n - d_n & \beta_{n-1} - d_{n-1} & \dots & \beta_1 - d_1 \end{bmatrix}$$

اثبات می شود که بردار ضرایب کنسول عبارتند از:

$$K = T^{-1} T^{-1}$$

$$K = [k_1 \dots k_n]$$

روش ②: جایگزین مستقیم:

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1) \dots (s - \mu_n)$$

μ_i 2 معلوم اند. n معادله و n مجهول k بدست می آید.

روش ۳) فرمول آکروسن :

درباره ماتریس کنترل پذیر را شکل می دهیم : $C = [B : AB \dots A^{n-1}B]$
حاله معادله مشخصه کنترل شده را $\phi(s)$ می نامیم .

$$\phi(s) = (s - \mu_1) \dots (s - \mu_n) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n$$

صفت عبارت $\phi(A)$ را می نامیم :

$$\phi(A) = A^n + \beta_1 A^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} A + \beta_n I$$

اگر فرمول آکروسن را محاسبه فضا ی کنترل K عبارت است از :

$$K = [0 \ 0 \dots 1] C^{-1} \phi(A)$$

(مثال) سیستم $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$ را در نظر بگیرید .
با استفاده از جایابی قطب ، قطب و سیستم را به مکان زیر انتقال دهید .

$$s_1 = -2 + 4j \quad ; \quad s_2 = -2 - 4j \quad ; \quad s_3 = -10$$

روش ۱) (بدلی تساهبی T) : با توجه به اینکه از مایخ ابتدا به شکل
کانونیکال است ، پس $T = I$ می باشد .

پس $|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \dots = s^3 + 4s^2 + 5s + 1$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

پس حل می دهیم : $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = (s + 2 - 4j)(s + 2 + 4j)(s + 10) =$
 $\dots = s^3 + 14s^2 + 40s + 20$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3$

$$T = [\beta_r - \alpha_r \quad \beta_r - \alpha_r \quad \beta_1 - \alpha_1] = [199 \quad 55 \quad 18]$$

$$K = T T^{-1} = T \underbrace{I^{-1}}_I = T = [199 \quad 55 \quad 18]$$

دس ۲) جائزہ مستقیم : $(s - \mu_1) \cdot (s - \mu_2)$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+k_3+4 \end{vmatrix} = s^3 + (4+k_3)s^2 + (5+k_2)s + 1+k_1 =$$

$$s^3 + 14s^2 + 40s + 20 \Rightarrow$$

$$K = [199 \quad 55 \quad 18]$$

دس ۳) فرمول اگر من:

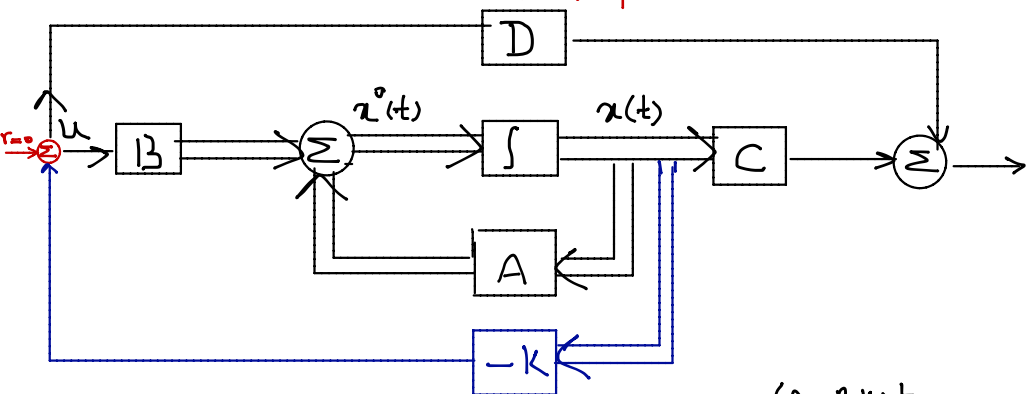
$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = s^3 + 14s^2 + 40s + 20 \Rightarrow$$

$$\phi(A) = A^3 + 14A^2 + 40A + 20I = \dots = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 18 \\ -18 & 159 & 17 \\ -17 & -52 & 117 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -22 & 117 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix}$$

نشان بدهد دیگر اِم فیدبک حالت

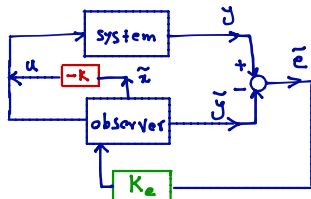


$$\dot{x} = (A - BK)x \longrightarrow x(t) = e^{(A - BK)t} x(0)$$

* بلر = 0 ، مسأله کنترل فیدبک حالت ، تنظیم و یا رگولاسیون (Regulation) می باشد کنترل کسده طراحی شده را رگولاسیون

می نامند. از طرفی بلر $\neq 0$ ، مسأله را ردیابی و یا Tracking می گویند کنترل کسده طراحی شده ، ردیاب نام دارد.

* بلورجبهه اینکه در این درس، برای کنترل اطلاعات حالت نیاز داریم و ممکن است این حالت که بطور مستقیم قابل دسترسی و اندازه گیری نباشند، سبب است این حالت را تخمین زده و از حالت را تخمین زده شده در محاسبه کنترل استفاده کنیم، یعنی $u = -K\tilde{x}$ ، به مسأله تخمین حالت، طراحی ردیف گر (Observer Design) میگویند.



* محاسبه سبب پیوسته ردیف گر (K_e)

$$\text{system} \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu \\ y = C\tilde{x} + Du \end{cases}$$

$$\text{observer} \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(\tilde{y} - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\tilde{x} + Du \end{cases}$$

$$\tilde{x} \rightarrow x : \dot{\tilde{x}} - \tilde{x} = A(\tilde{x} - \tilde{x}) + Bu - Bu - K_e(C\tilde{x} + Du - C\tilde{x} - Du)$$

$$x - \tilde{x} \equiv e : \dot{e}(t) = (A - K_e C)e(t)$$

برای پایداری ردیف گر منظور منفرجه خطا تخمین $(e(t))$ ، باید سیستم مربوطه دینامیک خطا، پایداری را داشته باشد. و باید به یاد داشت، مقادیر دینامیک ماتریس $A - K_e C$ درست چیدمان دارد تا در منصفه S قرار بگیرند. پس K_e باید به قدری تعیین شود که مقادیر دینامیک A درست چیدمان شوند. اما فلور که قبلاً در طراحی فیلد یک حالت گفته شد، به روشی جایگزین در سیستم، روش ماتریس سبب و فیلد اگر من و جبردار که در فیلد بطور مختصر گفته می شود.

* شرط لازم و کافی برای طراحی معبره رولیت گر (K_e) ، اینست که سیستم، مساعد و پذیر کامل حالت باشد. یعنی ماتریس هدایت پذیر $\mathcal{C}$ زبر، تمام رتبه باشد.

$$G = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

خلاصه روش کرماتیل K_e : (فرض کنیم می خواهیم معبره رولیت گر در $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ قرار گیرد).

① روش جایگزینی مستقیم: $\psi(s) = (s - \gamma_1) \dots (s - \gamma_n) = |sI - A + K_e C| \Rightarrow K_e = \dots$

$$K_e = (W G)^{-1} \begin{bmatrix} \theta_n - d_n \\ \theta_{n-1} - d_{n-1} \\ \vdots \\ \theta_1 - d_1 \end{bmatrix}$$

② روش تبدیل نسبی:

$$|sI - A| = s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n$$

$$\psi(s) = s^n + \theta_1 s^{n-1} + \dots + \theta_{n-1} s + \theta_n$$

$$W = \begin{bmatrix} d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & d_1 & 1 \\ d_{n-2} & d_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$K_e = \psi(A) G^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ روش آگرممن:

(مثال) برای سیستم $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$ ، یک رولیت گر با قطب $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$ طراحی کنید؟

① $|sI - A + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}| = \begin{vmatrix} s & k_1 - \gamma_2/\gamma \\ -1 & s + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + k_2 s + k_1 - \gamma_2/\gamma = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \Rightarrow K_e = \begin{bmatrix} 1/\gamma \\ 2 \end{bmatrix}$

② $W = \begin{pmatrix} d_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $|sI - A| = s^2 - \gamma_2/\gamma$ ، d_2 و $d_1 = 0$
 $G = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow W G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I = I^{-1} = (W G)^{-1}$
 $K_e = (W G)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_2/\gamma \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\gamma \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\Psi(A) = A^2 + 2.0A + 1.0I = \dots = \begin{pmatrix} 12.5 & 212 \\ 2. & 12.5 \end{pmatrix} ; \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$K_e = \Psi(A) \Theta^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 & 212 \\ 2. & 12.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 212 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A - K_e C) \tilde{x} + B u + K_e y \\ \tilde{x} &= \begin{pmatrix} 0 & -1.5 \\ 1 & -2.0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 12.5 & 212 \\ 2. & 12.5 \end{pmatrix} y \end{aligned}$$

در نهایت معادله را به صورت زیر می‌نویسند:

نحوه طراحی (اولین) ضریب حالت با جبر درخت گری

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (1) \\ y = Cx + Du \\ \dot{e} = (A - K_e C)e & (2) \end{cases} ; u = -K \tilde{x} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{بهر حالت الحاقی} \\ \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = z ; e = x - \tilde{x} \end{array} \right.$$

$$(1) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(-K)(x - e) = (A - BK)x + BK e \end{cases}$$

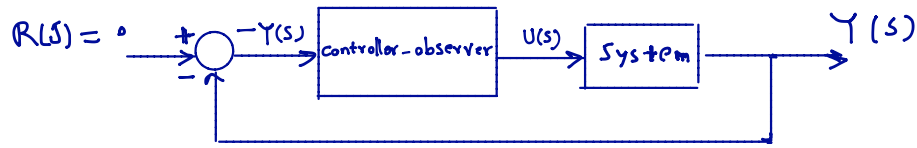
$$(2) \rightarrow \begin{cases} \dot{e} = (A - K_e C)e \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} z \\ \hat{A} &\leftarrow \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{جایگزینی مستقیم}]{\text{pole placement}} |sI - \hat{A}| =$$

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{vmatrix} = |sI - A + BK| |sI - A + K_e C|$$

بایستی بدانید رابطه می‌تواند به شکل طراحی state-feedback, observer از یکدیگر مستقل بود و اولدین در طراحی وجود ندارد.

تابع تبدیل (کنترلر-دیت گتر) در سیستم الحاقی



$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y}) = A\tilde{x} - BK\tilde{x} + K_e(y - c\tilde{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - BK - K_eC)\tilde{x} + K_e y \xrightarrow{\text{تبدیل به ساس}}$$

$$s\bar{X}(s) = (A - BK - K_eC)\bar{X}(s) + K_e Y(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A + BK + K_eC)\bar{X} = K_e Y$$

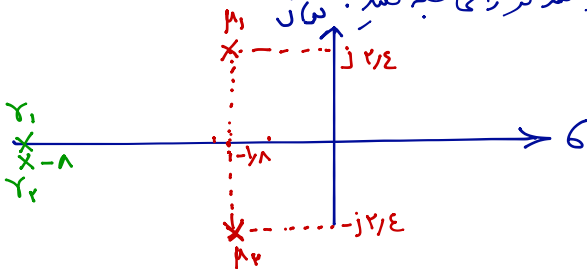
$$\Rightarrow \bar{X} = (sI - A + BK + K_eC)^{-1} K_e Y \xrightarrow{u = -K\tilde{x}} \text{طریق فید در}$$

$$-K\bar{X} = U(s) = -K(sI - A + BK + K_eC)^{-1} K_e Y(s)$$

$$H(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = K(sI - A + BK + K_eC)^{-1} K_e$$

(مثال) بلوک در برد $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$ ، تب تبدیل کنده . ببینید

حالت با وجود مشاهده ناگهانی حالت طوری طراحی کنید که تقابله هر یک در مکانی هم برآید و چنانچه شونده . سپس تابع تبدیل توأم ، دیت گتر-کنترل را می باید کنید . بیایم



$$* \text{طراحی شده حالت:} \quad |sI - A + BK| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r_0/y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 1/\wedge - j\sqrt{2}/\wedge)(s + 1/\wedge + j\sqrt{2}/\wedge)$$

$$= s^2 + \sqrt{2}/y s + 9 = s^2 + k_2 s + k_1 - r_0/y$$

$$\Rightarrow K = [r_0/y \quad \sqrt{2}/y]$$

$$(s - \gamma_1)(s - \gamma_2) = (s + \wedge)^2 = s^2 + 14s + 49 = |sI - A + K_e c| = \begin{vmatrix} s + k_{1e} & 1 \\ r_0/y - k_{2e} & s \end{vmatrix}$$

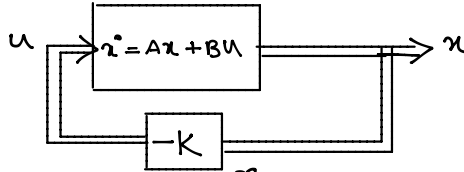
$$= s^2 - k_{1e}s - r_0/y + k_{2e} \Rightarrow K_e = \begin{bmatrix} -14 \\ 144/y \end{bmatrix}$$

$$H_{o-c}(s) = K(sI - A + BK + K_e c)^{-1} K_e =$$

$$[r_0/y \quad \sqrt{2}/y] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r_0/y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0/y & \sqrt{2}/y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ 144/y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -14 \\ 144/y \end{bmatrix} = \dots$$

$$= \frac{\sqrt{2}/\wedge \cdot 14 s + \sqrt{2}/\wedge \cdot 144/y}{s^2 + 14/y s + 181/y}$$

کنترل سیمو حالت بهینه Linear Quadratic Regulator (LQR)



$$u = -Kx \quad : \quad J = \int_0^{\infty} (x^*(t) Q x(t) + u^*(t) R u(t)) dt$$

علامت * بیانگر اندازه مندایج است. بزرگتر باشد v داریم $v^* v = |v|^2$
 باید به J، واضح است که باید یک مساله بهینه سازی حل شود که هدف آن کمینه کردن
 ترکیب از کل انرژی مصرفی در حالت 1 و 2 و رسیدن کنترلی u(t) می باشد. چون J
 بیانگر مصرف (هزینه) است به آن تابع هزینه (Cost function) می گویند.
 ماتریس های Q و R معین مثبت و self-adjoint ($R^* = R, Q^* = Q$) می باشند.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad u = -Kx \Rightarrow \dot{x} = (A - BK)x \quad (1)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + x^* K^* R K x) dt = \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt$$

چون عبارت انتقال تغییر بیانگر تغییرات انرژی مصرفی است، برای بهینه سازی J
 این تغییرات را منفی (کاهشی) در نظر می گیریم.

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\frac{d}{dt} (x^* P x) = -\dot{x}^* P x - x^* \dot{P} x \xrightarrow{\text{حالت پایدار 1}} = -\{x^* (A - BK)^* P + P (A - BK) + x^* P (A - BK) x\} = -x^* \{ (A - BK)^* P + P (A - BK) \} x$$

$$\Rightarrow (A - BK)^* p + p(A - BK) = -(Q + K^* R K)$$

باید چه Self-a disjoint بدین R می توان از بسط زیر (هسته) باخ کرد:

$$R = R^* : R = T^* T$$

$$R^* = (\underbrace{T}_{a}^* \underbrace{T}_{b})^* = b^* a^* = T^* T = R$$

$$\Rightarrow (A - BK)^* p + p(A - BK) + Q + \underbrace{K^* T^*}_{(TK)^*} T K = 0$$

$$A^* p + pA + Q - (K^* B^* p + pBK) + (TK)^* TK = 0$$

$$\Rightarrow A^* p + pA + Q + [TK - (T^*)^{-1} B^* p]^* [TK - (T^*)^{-1} B^* p] - pB \bar{R}^{-1} B^* p = 0$$

برای خنثی شدن و یافتن K برابر با همزمانی می گیریم.

$$\Rightarrow K = T^{-1} (T^*)^{-1} B^* p = \underbrace{(T^* T)^{-1}}_R B^* p = \bar{R}^{-1} B^* p$$

برای بدین P، از معادله جبر را بنویسند و زیر استفاده می کنند:

$$A^* p + pA - pB \bar{R}^{-1} B^* p + Q = 0 \quad (\text{معادله ریگتی})$$

(مساله 1) برپایه $x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u$ یک کنترل کننده LQR طراحی کنید که تابع هزینه زیر را بهینه کند؟

$$J = \int_0^\infty (x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_Q x + \underbrace{u^T u}_{R=1}) dt$$

$$u = -Kx = -\bar{R}^{-1} B^* p x = -\bar{1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -p_3 & -p_4 \end{pmatrix} x = -p_3 x_1 - p_4 x_2$$

برای بدین P از معادله ریگتی زیر استفاده می کنند:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -p_r p_r + 1 & p_1 - p_r - p_r p_\varepsilon \\ p_1 - p_r - p_r p_\varepsilon & \underbrace{p_r + p_r - 2p_\varepsilon - p_\varepsilon^2 + 1}_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_r p_r = 1 \text{ (1)} ; p_r = \frac{p_1}{1+p_\varepsilon} \text{ (2)} ; p_r = \frac{p_1}{1+p_\varepsilon} \text{ (3)} \xrightarrow{(2)(3)} p_r = p_r \xrightarrow{(1)} p_r^2 = p_r^2 = 1 \Rightarrow p_r = p_r = 1$$

$$\xrightarrow{(4), p_r = p_r = 1} p_r - 2p_\varepsilon - p_\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow p_\varepsilon = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow p_\varepsilon = 1 ; p_1 = 2$$

$$p = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{u = -x_1 - x_2}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مسئله (برای حل) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$ را به کمک LAR طراحی کنید.
 تابع هزینه $J = \int_0^T (x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + |u|^2) dt$ را کم کنید؟
 (در اینجا $\beta = 1$ و $R = 1$ است)

$$A^* p + p A - p B R^{-1} B^* p + Q = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -p_r^2 + 1 & p_1 - p_r p_r \\ p_1 - p_r p_\varepsilon & 2p_r - p_\varepsilon^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K = R^{-1} B^* p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u = -Kx = -x_1 - 2x_2$$

آرپیضام LAR با وجود در حالت طراحی کم، به جای حالت x_1, x_2 ، تخمین $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ را به کار می‌برد.
 مابعد (1) u است و در این حالت $u = -\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2$ می‌باشد.

(مثال) آیا می‌توانیم برای سیستم $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$ یک کنترل کننده فیدبک حالت با LQR طراحی کرد؟
 $J = \int_0^{\infty} (\dot{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{x} + u^2) dt$

$$|sI - A + BK| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \right| =$$

$$\begin{vmatrix} s+1+k_1 & -1+k_2 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s+1+k_1)(s-2) \xrightarrow[\mu_1, \mu_2]{\text{placement}} \frac{p_{\text{ole}}}{p_{\text{placement}}} (s-\mu_1)(s-\mu_2)$$

باتوجه به آنکه همواره یک قطب در $s=2$ می‌باشد و هیچ ارتباطی با پارامترهای k_1 و k_2 ندارد، عملی نمی‌تواند برای سیستم بالا فیدبک حالت (حتی با استفاده از جایابی قطب در $s=-1$) طراحی کرد. از این مثال می‌توان فهمید که برای طراحی LQR نیز باید کنترل پذیر سیستم بررسی شود. اگرچه دلویت ریگتی را نداشته و سعی در حل P در $s=2$ میسر K داشته باشیم، به جواب نخواهیم رسید (به سادگی)، با نرم افزار MATLAB نیز که عبرت از آن جواب کم‌زیر حاصل می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R = 1;$$

$$K = \text{Lqr}(A, B, Q, R)$$

$$K =$$

$$K_1 \leftarrow \text{NaN} \quad K_2 \leftarrow \text{NaN}$$

$$u = -K * x;$$

* **فیدبک خروجی**: در این صورت اگر سیستم مدتی به دلیل حالت باشد، آن زمان

می توان فیدبک خروجی (output Feedback) طراحی کرد. در این حالت کنترل کننده به صورت $u = Lx$ می گیریم و با تعجب به معادلات حالت می برد

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

برای سیستم: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

$$u = L y \Rightarrow u = L (Cx + Du) = L C x + L D u$$

$$\Rightarrow (I - L D) u = L C x \Rightarrow u(t) = \underbrace{(I - L D)^{-1} L C}_K x$$

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} B A^{-1}}{1 + \text{Tr}(B A^{-1})}$$

مجموعه اعداد در قطر اصلی است. $\text{Tr}(M)$

در رابطه بالا $A = I$ و $B = -LD$ می باشد، پس داریم: $(I - LD)^{-1} = I - \frac{(-LD)}{1 - \text{Tr}(LD)} = I + \frac{LD}{1 - \text{Tr}(LD)}$

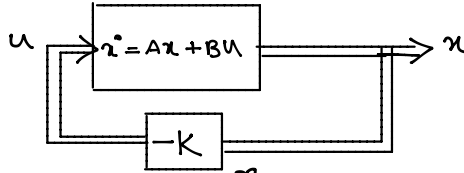
$\Rightarrow K = (I + \frac{LD}{1 - \text{Tr}(LD)}) L C \rightarrow$ ادامه طراحی کاهنده فیدبک
حالت است (1) با این نتایج که مقدار مجبور بار انداز $L_{m1}, \dots, L_{mq}$ از ماتریس فیدبک خروجی می باشد و مثلاً با جایابی قطب، برای حل این مسئله بار انداز به یک معادله جبر خطی حل شود.

$$|sI - A + B K| = (s - \mu_1) \dots (s - \mu_n)$$

بر حالت خاص که $D = 0$ می باشد، $u = L C x$ می شود در حقیقت $K = L C$ معادله جبر خطی حاصل می شود که به راحتی پارامتر L را بدست می آوریم.

$$|sI - A + B L C| = (s - \mu_1) \dots (s - \mu_n)$$

کنترل سیمو حالت بهینه Linear Quadratic Regulator (LQR)



$$u = -Kx \quad : \quad J = \int_0^{\infty} (x^*(t) Q x(t) + u^*(t) R u(t)) dt$$

علامت * بیانگر اندازه منداری است. به هر چه علامت * داریم $v^* v = |v|^2$
 باید به J، واضح است که باید یک مساله بهینه سازی حل شود که هدف آن کمینه کردن
 ترکیب از کل انرژی مصرفی در حالت 1 و 2 و رسیدن کنترلی u(t) می باشد. چون J
 بیانگر مصرف (هزینه) است به آن تابع هزینه (Cost function) می گویند.
 ماتریس های Q و R معین مثبت و self-adjoint ($R^* = R, Q^* = Q$) می باشند.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad u = -Kx \Rightarrow \dot{x} = (A - BK)x \quad (1)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + x^* K^* R K x) dt = \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt$$

چون عبارت انتقال تغییر بیانگر تغییرات انرژی مصرفی است، برای بهینه سازی J
 این تغییرات را منفی (کاهشی) در نظر می گیریم.

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\frac{d}{dt} (x^* P x) = -\dot{x}^* P x - x^* \dot{P} x \xrightarrow{\text{حالت پایدار 1}} = -\{x^* (A - BK)^* P + x^* P (A - BK) + x^* P (A - BK) x\} = -x^* \{ (A - BK)^* P + P (A - BK) \} x$$

$$\Rightarrow (A - BK)^* p + p(A - BK) = -(Q + K^* R K)$$

باید چه Self-a disjoint بدین R می توان از این به دست زیر (همیشه) پاسخ کرد:

$$R = R^* : R = T^* T$$

$$R^* = (\underbrace{T}_{a}^* \underbrace{T}_{b})^* = b^* a^* = T^* T = R$$

$$\Rightarrow (A - BK)^* p + p(A - BK) + Q + \underbrace{K^* T^*}_{(TK)^*} T K = 0$$

$$A^* p + pA + Q - (K^* B^* p + pBK) + (TK)^* TK = 0$$

$$\Rightarrow A^* p + pA + Q + [TK - (T^*)^{-1} B^* p]^* [TK - (T^*)^{-1} B^* p] - pB \bar{R}^{-1} B^* p = 0$$

برای تغییر در وقت K برابر با همزمان تغییر می کند.

$$\Rightarrow K = T^{-1} (T^*)^{-1} B^* p = \underbrace{(T^* T)^{-1}}_R B^* p = \bar{R}^{-1} B^* p$$

برای بدین P، از معادله جبر باید به این معادله زیر استفاده می کنیم:

$$A^* p + pA - pB \bar{R}^{-1} B^* p + Q = 0 : \text{ (معادله ریگتی)}$$

(مسئله 1) بر روی $x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u$ یک کنترل کننده LQR طراحی کنید که تابع هزینه زیر را بهینه کند؟

$$J = \int_0^\infty (x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_Q x + \underbrace{u^T u}_{R=1}) dt$$

$$u = -Kx = -\bar{R}^{-1} B^* p x = -\bar{1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -p_3 & -p_4 \end{pmatrix} x = -p_3 x_1 - p_4 x_2$$

برای بدین P از معادله ریگتی زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -p_r p_r + 1 & p_1 - p_r - p_r p_\varepsilon \\ p_1 - p_r - p_r p_\varepsilon & \underbrace{p_r + p_r - 2p_\varepsilon - p_\varepsilon^2 + 1}_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_r p_r = 1 \text{ (1)} ; p_r = \frac{p_1}{1+p_\varepsilon} \text{ (2)} ; p_r = \frac{p_1}{1+p_\varepsilon} \text{ (3)} \xrightarrow{(2)(3)} p_r = p_r \xrightarrow{(1)} p_r^2 = p_r^2 = 1 \Rightarrow p_r = p_r = 1$$

$$\xrightarrow{(4), p_r = p_r = 1} p_r - 2p_\varepsilon - p_\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow p_\varepsilon = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow p_\varepsilon = 1 ; p_1 = 2$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{u = -x_1 - x_2}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مسئله (برای حل) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$ را به کمک LQR طراحی کنید.
تابع هزینه $J = \int_0^\infty (x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + u^T R u) dt$ را کم کنید؟
 $\beta = 1$ (در R)

$$A^* P + P A - P B R^{-1} B^* P + Q = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_r \\ p_r & p_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -p_r^2 + 1 & p_1 - p_r p_r \\ p_1 - p_r p_\varepsilon & 2p_r - p_\varepsilon^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = R^{-1} B^* P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u = -Kx = -x_1 - x_2$$

آرپیترام LQR با وجود در حالت طراحی کم، به جای حالت x_1, x_2 ، تخمین $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ را به کار ببریم.
میانگین u است و در حالت کم و در حالت کم: $u = -\hat{x}_1 - \hat{x}_2$

(مثال) آیا می‌توانیم برای سیستم $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$ یک کنترل کننده فیدبک حالت با LQR طراحی کرد؟

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{x} + u^2) dt$$

$$|sI - A + BK| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \right| =$$

$$\begin{vmatrix} s+1+k_1 & -1+k_2 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s+1+k_1)(s-2) \xrightarrow[\mu_1, \mu_2]{\text{pole placement}} (s-\mu_1)(s-\mu_2)$$

باتوجه به آنکه همواره یک قطب در $s=2$ می‌باشد و هیچ ارتباطی با پارامترهای k_1 و k_2 ندارد، عملی نمی‌تواند برای سیستم بالا فیدبک حالت (حتی با استفاده از جایابی قطب در $s=2$) طراحی کرد. از این مثال می‌توان فهمید که برای طراحی LQR نیز باید کنترل پذیر سیستم بررسی شود. اگرچه دولت ریگتی را نداشته و سعی در جبران K داشته باشیم، به جواب نخواهیم رسید (به سادگی)، با نرم افزار MATLAB نیز که عبرت از آنست جواب زیر حاصل می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R = 1;$$

$$K = \text{Lqr}(A, B, Q, R)$$

$$K =$$

$$K_1 \leftarrow \text{NaN} \quad K_2 \leftarrow \text{NaN}$$

$$u = -K * x;$$